INTEGRAZIO ANIZKOITZA (19/20 - 20/21)

1.- Kalkulatu $S \equiv x^2 + y^2 = (z-3)^2$, non $1 < z < 3$ gainazalaren zatiaren azalera.

2.- Kalkulatu $V \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 2 \\ x^2 + y^2 \ge z \\ z \ge 0 \end{cases}$ solidoaren bolumena.

3.- Izan bedi $S_1 \equiv z = x^2 + y^2 + 1$ eta $S_2 \equiv z = 2$ gainazalek osaturiko S gainazal itxia. Kalkulatu S gainazaletik irteten den $\vec{F} = \left(y, x, \dfrac{4z}{\pi} \right)$ funtzio bektorialaren fluxua.

4.- $\vec{F} = \left(yz, -xz, x^2 + y^2 \right)$ funtzio bektoriala emanik, kalkulatu lehenengo oktantean definituriko $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ esferaren zatitik irteten den fluxua.

5.- $\vec{F} = \left(3x^2, +e^y \cdot \arctan y \right)$ funtzio bektoriala emanik, kalkulatu $\int_C \vec{F} d\vec{r}$, non C kurba sinple eta zatika leuna, bi zati hauetaz osaturik dagoen:

$C_1 \equiv x^2 + y^2 = 4$, $A = (2,0)$ puntutik $B = (0,2)$ puntura, eta

$C_2 \equiv x^2 + y^2 = 2y$, $B = (0,2)$ puntutik $D = (0,0)$ puntura.

6.- Izan bedi $\begin{cases} S_1 \equiv z = x^2 + y^2 \\ S_2 \equiv x^2 + y^2 = 4 \\ S_3 \equiv z = 0 \end{cases}$ gainazalek mugaturiko V solidoa. Izan bedi $C \equiv S_1 \cap S_2 \equiv \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ kurba. Eta, izan bitez $\vec{F}(x,y,z) = \left(yx^2, -xy^2, -z^2 \right)$ funtzio bektoriala eta $f(x,y,z) = div\left(\vec{F}\right)$ funtzio eskalarra. Adierazi zer kalkulatzen ari den hurrengo integral bakoitzaren bitartez:

a) $\iiint_V dxdydz$

b) $\oint_C \left(yx^2 dx - xy^2 dy - z^2 dz \right)$

c) $\iint_{S_1} dS$

d) $-2\iiint_V z\, dxdydz$

e) $\iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + 4\left(x^2 + y^2\right)}\, dxdy$ non $R_{xy} \equiv x^2 + y^2 \le 4$

f) $\iint_{S_3} \left(yx^2 dydz - xy^2 dzdx - z^2 dxdy \right)$ g) $\iint_{R_{xy}} dxdy$ non $R_{xy} \equiv x^2 + y^2 \le 4$ (V –ren mugako planoaren zatiaren azalera)

h) $\iint\limits_{R_{xy}} \left(-yx^2 \cdot 2x + xy^2 \cdot 2y - \left(x^2+y^2\right)^2\right) dxdy$ non $R_{xy} \equiv x^2+y^2 \le 4$

7.- Kalkulatu goitik $z=y$ planoak eta behetik $z=x^2+y^2$ paraboloideak mugaturiko solidoaren bolumena.

8.- Kalkulatu $V \equiv x^2+y^2-3 \le z \le 2$ solidoaren S mugatik irteten den $\vec{F}(x,y,z)=\left(\sin\left(y^2\right)-z, 3x, 2z\right)$ bektorearen fluxua.

9.- Izan bedi $\vec{F}(x,y,z)=\left(e^y+z, 2y, 4\right)$ bektorea. $V \equiv 2x^2+2y^2-2 \le z \le 0$ solidoa emanik, kalkulatu bere mugaren paraboloidearen zatitik zein planoaren zatitik irteten diren $\vec{F}$-ren fluxuak.

10.- Izan bedi $V \equiv \begin{cases} z \le 2 \\ x^2+y^2 \ge 2-z \\ z \ge \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ espazioko solidoa.

a) Kalkulatu V-ren bolumena.

b) Kalkulatu V mugatzen duen $x^2+y^2=2-z$ gainazalaren zatiaren azalera.

c) Kalkulatu V mugatzen duen $z=\sqrt{x^2+y^2}$ gainazalaren zatitik irteten den $\vec{F}(x,y,z)=\left(xz,\ yz, 1\right)$ bektorearen fluxua.

11.- Kalkulatu $z=0$ eta $z=3$ planoen artean mugaturiko $x^2+y^2=1$ zilindroaren zatitik irteten den $\vec{F}(x,y,z)=xz\vec{i}-y^2\vec{j}+xz\vec{k}$ bektorearen fluxua.

12.- $A(1,1)$ eta $B(-1,1)$ puntuen artean mugaturiko $C \equiv y=2-x^2$ kurbaren zatia, eta $\vec{F}(x,y)=\left(2xe^{x^2+2y^2}-y,\ 4ye^{x^2+2y^2}+x^2+\sqrt{y^4+y}\right)$ eremu bektoriala emanik, kalkulatu $I=\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

13.- Lortu $\int\limits_C \dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ integralaren balioa hurrengo bi kasuetan:

a) $C \equiv (x-1)^2+(y-1)^2=1$.

b) $C \equiv \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Aurreko emaitzen arabera, zer esan dezakegu integralaren bidearekiko independentziari buruz?

14.- a) Kalkulatu $x^2+y^2+z^2=16$ esferak, eta, $z=2$ eta $z=3$ planoek mugaturiko V solidoaren bolumena.

b) Aurkitu V muga osatzen duen esferaren zatiaren azalera.

15.- $\vec{F}(x,y,z)=\vec{i}+x^2\cdot\vec{k}$ funtzio bektoriala eta $\begin{cases} S_1 \equiv x^2+y^2+z^2=4 \text{ non } -2\le z\le 1 \\ S_2 \equiv x^2+y^2+z^2=4z \text{ non } 1\le z\le 4 \end{cases}$

gainazalak emanik:

a) Kalkulatu $\vec{F}$ -ren zirkulazioa aurreko gainazalen arteko C ebakidura-kurban zehar.

b) Kalkulatu aurreko solidoaren mugatik irteten den fluxua $\vec{F}$ funtzioaren eraginez.

c) Kalkulatu solido horren mugako S_1 gainazalaren zatitik irteten den fluxua $\vec{F}$ funtzioaren eraginez.